

## Ein Verfahren zur optischen Abbildung mit einem über die klassische Auflösungsgrenze hinausgehenden Auflösungsvermögen

Von W. LUKOSZ

Physikalisches Institut der Techn. Hochschule Braunschweig  
(Z. Naturforsch. 18 a, 436–438 [1963]; eingegangen am 23. Februar 1963)

Nach den klassischen Überlegungen von ABBE, HELMHOLTZ und RAYLEIGH wird dem Auflösungsvermögen optischer Systeme durch die Beugung eine prinzipielle Grenze gesetzt, die durch die Wellenlänge  $\lambda$  der benutzten Strahlung und durch die numerische Apertur  $A$  des optischen Systems bestimmt wird. Im folgenden wird ein Verfahren vorgeschlagen, das eine Abbildung mit einem über die klassische Auflösungsgrenze hinaus gesteigerten Auflösungsvermögen ermöglicht.

Ausgangspunkt der Überlegungen ist die optische Übertragungstheorie, eine neue Formulierung des optischen Abbildungsvorgangs auf der unveränderten physikalischen Grundlage der skalaren KIRCHHOFF'schen Beugungstheorie. Die Übertragungstheorie führt einige Begriffe in die Optik ein, deren Analoga aus der elektrischen Nachrichtentechnik und der Elektroakustik gut bekannt sind. Dort wird ein Übertragungssystem als linear bezeichnet, wenn das von ihm erzeugte Ausgangssignal in linearer Weise vom Eingangssignal abhängt. Lineare Systeme übertragen cosinus-förmig zeitabhängige Signale unverzerrt, d. h. ohne Erzeugung von Oberwellen. „Frequenz- und Phasengang“ des Systems geben das Amplitudenverhältnis und die zeitliche (Phasen-) Verschiebung von Ausgangs- und Eingangssignal an. Ist ein Signal aus mehreren Frequenzen zusammengesetzt, werden diese verschiedenen Frequenzen von einem linearen System voneinander unabhängig übertragen.

In der Optik handelt es sich nicht um die Übertragung zeitabhängiger, sondern um die Übertragung ortsabhängiger Signale. Diese optischen Signale sind Amplituden- bzw. Intensitätsverteilungen als Funktion der Ortskoordinaten. Die Verteilung in der Objektebene ist das Eingangssignal des optischen (Übertragungs-) Systems; die Verteilung in der Bildebene das Ausgangssignal. Jeweils ist noch anzugeben, welche Kohärenz die das Objekt beleuchtende Strahlung besitzt. Hier seien die beiden extremen Fälle betrachtet:

(a) Das Objekt werde kohärent, d. h. von einer Lichtquelle mit – von der Objektebene aus gesehen – sehr kleiner Winkelausdehnung, beleuchtet. Dann sind die optischen Signale, für die das optische System als lineares Übertragungssystem wirkt, Amplituden.

(b) Das Objekt werde inkohärent, d. h. von einer Lichtquelle sehr großer Winkelausdehnung, beleuchtet. Dann sind die optischen Signale, für die das optische System als lineares Filter wirkt, Intensitäten.

Von dem linearen optischen Übertragungssystem wird ein cosinusförmig-ortsabhängiges Signal unverzerrt, d. h. ohne Erzeugung von Oberwellen abgebildet. Dieses Signal wird durch ein Strichgitter mit cosinus-

förmiger Transmission realisiert. Das Reziproke der Gitterkonstanten wird als Orts-Frequenz (gemessen in Linien/mm) bezeichnet. Die Übertragungsfunktion des optischen Systems gibt das Amplitudenverhältnis und die seitliche Verschiebung von Ausgangs- und Eingangssignal an. Beliebige ortsabhängige Signale kann man als Überlagerung solcher Strichgitter verschiedener Orts-Frequenz und Orientierung auffassen (FOURIER-Theorem). Die verschiedenen Orts-Frequenzen werden von einem linearen Übertragungssystem voneinander unabhängig übertragen.

Die Beugung bewirkt, daß die optischen Systeme Tiefpaß-Filter sind. Sie übertragen nur ein begrenztes Band von Orts-Frequenzen  $R : |R| \leq R'$ . Orts-Frequenzen  $R$ , die größer als die Grenzfrequenz  $R'$  sind, werden nicht mehr durchgelassen. Der Wert der Grenzfrequenz ist (a) bei „gerader“ kohärenter Beleuchtung des Objekts  $R_k' = A/\lambda$ , (b) bei inkohärenter Objekt-Beleuchtung  $R_i' = 2A/\lambda$ . Da die Werte dieser Grenzfrequenzen aus der bewährten KIRCHHOFF'schen Theorie folgen, erscheint zunächst eine Überschreitung dieser Auflösungsgrenzen unmöglich.

Es ist aber doch möglich, Informationen über Orts-Frequenzen  $R$  des Objekts, die größer als die Grenzfrequenz  $R'$  des benutzten Systems sind, zu gewinnen. Das optische System „sieht“ ja nicht das Objekt selbst, sondern die Amplituden- bzw. Intensitäts-Verteilung direkt hinter dem Objekt. Auf die in diesem Eingangssignal enthaltenen Orts-Frequenzen bezieht sich die Angabe der Grenzfrequenz. Ist das Objekt in der üblichen Weise gleichförmig beleuchtet, so ist das Eingangssignal mit der Transmission des Objekts identisch, die Angabe der Grenzfrequenz bezieht sich daher auch auf das Objekt selbst. Dies gilt aber nicht mehr, wenn das Objekt mit örtlich variabler Amplitude bzw. Intensität beleuchtet wird, oder wenn das Objekt aus dem eigentlichen zu beobachtenden Objekt und einer davor oder dahinter angebrachten Maske mit örtlich variabler Transmission besteht. Zum Beispiel seien sowohl das Objekt wie auch die – in der Nähe der Objektebene angebrachte oder dorthin abgebildete – Maske Strichgitter mit den Orts-Frequenzen  $R$  bzw.  $R_M$ :

$$\text{Objekt: } T(x) = \cos 2\pi Rx, \quad (1)$$

$$\text{Maske: } M(x) = \cos 2\pi R_M(x - \Delta). \quad (2)$$

Dabei ist  $x$  die Koordinate in der Objektebene senkrecht zu den Gitterstrichen. Das Eingangssignal des optischen Systems ist:

$$S(x) = T(x) \cdot M(x)$$

$$= \frac{1}{2} \cos[2\pi(R - R_M)x + 2\pi R_M \Delta] \\ + \frac{1}{2} \cos[2\pi(R + R_M)x - 2\pi R_M \Delta]. \quad (3)$$

Darin tritt neben der Summenfrequenz die Differenzfrequenz  $(R - R_M)$  zwischen Objekt- und Masken-Frequenz auf, d. h. es entstehen sogenannte Moiré-Streifen. Auch wenn das Objekt-Gitter allein nicht mehr aufgelöst wird ( $R > R'$ ), kann die Differenzfrequenz  $(R - R_M)$  bei geeigneter Wahl der Masken-Frequenz  $R_M$  vom System übertragen werden, d. h. die Moiré-



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

Streifen werden abgebildet. Ein derartiger Versuch wurde bereits von BLANC-LAPIERRE, PERROT und PERI<sup>1</sup> durchgeführt, ähnliche Versuche machten FRANCON<sup>2</sup> und WOLTER<sup>3</sup>. Analog läßt sich auch folgende elektronenmikroskopische Erscheinung verstehen: Liegen zwei Kristall-Lamellen (in unserer Sprechweise „Objekt+Maske“) aufeinander, deren Kristallgitter etwas gegeneinander verdreht sind oder sich in ihren Gitterkonstanten etwas voneinander unterscheiden, treten Moiré-Streifen auf. Aus den Unregelmäßigkeiten der Moiré-Streifen kann auf Baufehler des Kristallgitters geschlossen werden, auch wenn das Elektronen-Mikroskop die Netzebenen-Abstände nicht auflöst (vgl. z. B. MENTER<sup>4</sup>).

Mit der oben beschriebenen Methode werden zwar Informationen über Objekt-Frequenzen gewonnen, die bei der normalen Abbildung nicht mehr aufgelöst werden. Diese Informationen liegen aber „verschlüsselt“ als Differenzfrequenzen zwischen Objekt- und Masken-Frequenzen vor; ihre Auswertung ist nur in einfachen Fällen möglich. Es entsteht kein Abbild des Objekts.

Mit dem hier vorgeschlagenen „Zwei-Masken-Verfahren“ sollen diese Informationen entschlüsselt werden, um ein richtiges Abbild beliebiger Objekte mit erhöhtem Auflösungsvermögen zu erhalten. Aus der vom System durchgelassenen Differenzfrequenz muß die ursprüngliche Objekt-Frequenz wiedergewonnen werden. Dies wird durch eine 2. Maske in der Bildebene erreicht (vgl. Abb. 1).

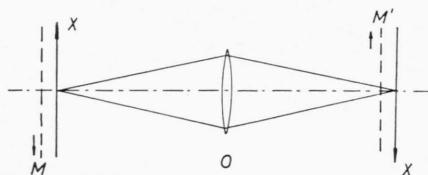


Abb. 1. Anordnung beim „Zwei-Masken-Verfahren“. In dem gezeichneten Querschnitt bezeichnet  $x$  die Objekt- und Bildebene;  $O$  ist das optische System,  $M$  und  $M'$  sind die beiden Masken (z. B. Strichgitter), die in zueinander optisch konjugierten Ebenen angebracht sind.

Die 2. Maske sei ebenfalls ein Strichgitter. Die Gitterkonstanten der Masken  $M$  und  $M'$  sollen im Verhältnis des Abbildungsmaßstabs zwischen Objekt- und Bildebene stehen. Die Transmission von  $M'$  sei:

$$M'(x) = \cos[2\pi R_M(x - \Delta')]. \quad (4)$$

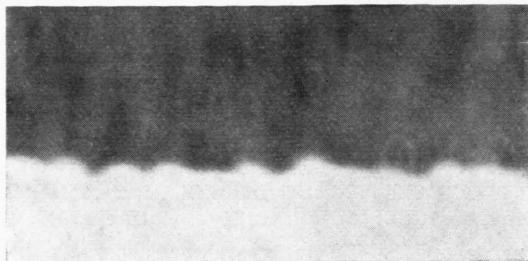
Dabei bezeichnet dieselbe Koordinate  $x$  zueinander optisch konjugierte Punkte in Objekt- und Bildebene. In dieser Schreibweise (ohne Abbildungsmaßstab!) haben die beiden Masken dieselbe Orts-Frequenz  $R_M$ .

Aus dem vom System durchgelassenen Signal

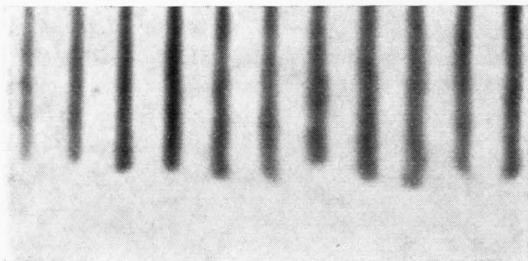
$$S'(x) = \text{const.} \cos[2\pi(R - R_M)x + 2\pi R_M \Delta] \quad (5)$$

<sup>1</sup> A. BLANC-LAPIERRE, M. PERROT u. G. PERI, C. R. Acad. Sci., Paris **236**, 1540 [1953].

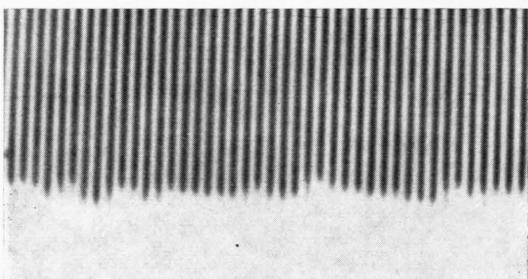
<sup>2</sup> M. FRANCON, Nuovo Cim., Suppl. **9**, 283 [1952].



(a)



(b)



(c)

Abb. 2. Zur experimentellen Prüfung des Zwei-Masken-Verfahrens wurde zunächst mit künstlich abgeblendeten optischen Systemen gearbeitet \*. (a) Das Objekt — ein Strichgitter — wird von dem konventionell benutzten optischen System nicht aufgelöst. (b) In der Nähe der Objektfläche wird als Maske ein Strichgitter angebracht. Es entstehen Moiré-Streifen, die vom System abgebildet werden. (c) Abbildung mit dem Zwei-Masken-Verfahren. Das Objekt wird aufgelöst.

entsteht hinter der 2. Maske:

$$\begin{aligned} \tilde{S}(x) &= S'(x) \cdot M'(x) \\ &= \text{const.} \{ \cos[2\pi R x + 2\pi R_M(\Delta - \Delta')] \\ &\quad + \cos[2\pi(R - 2R_M)x + 2\pi R_M(\Delta + \Delta')]\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Mit Hilfe der Maske  $M'$  wird aus der Differenzfrequenz  $(R - R_M)$  durch Bildung der Summenfrequenz  $(R - R_M) + R_M = R$  die Objekt-Frequenz  $R$  zurückge-

<sup>3</sup> H. WOLTER, Physica **24**, 457 [1958] und **26**, 75 [1960].

<sup>4</sup> J. W. MENTER, Adv. Phys. **7**, 299 [1958].

\* Herrn cand. phys. M. MARCHAND danke ich für seine experimentelle Mitarbeit.

wonnen. Außerdem tritt aber eine weitere Orts-Frequenz  $(R - R_M) - R_M = R - 2R_M$  störend im Bild auf. Es gelingt aber, diese störende Orts-Frequenz zu eliminieren. Dazu werden die Masken M und M' senkrecht zu ihren Gitterstrichen über das Objekt- bzw. Bildfeld bewegt, und zwar derart, daß ihre Verschiebungen  $\Delta$  bzw.  $\Delta'$  dauernd zueinander optisch-konjugiert sind:

$$\Delta = \Delta'. \quad (7)$$

(Das Bild der 1. Maske M soll sich dauernd mit der 2. Maske M' decken.) Aus Gln. (6) und (7) ist zu erkennen, daß nur die störende Orts-Frequenz mit einer von  $\Delta$  abhängigen seitlichen Verschiebung auftritt. Werden die Masken M und M' in der oben beschriebenen Weise mit konstanter Geschwindigkeit über eine oder mehrere ganze Gitterkonstanten  $d_M = 1/R_M$  senkrecht zu ihren Gitterstrichen bewegt, verschwindet die störende Orts-Frequenz im zeitlichen Mittel. Auf einem

Strahlungsempfänger geeigneter zeitlicher Trägheit entsteht das Bild:

$$\tilde{S}(x) = \cos 2\pi Rx. \quad (8)$$

Mit dem Zwei-Masken-Verfahren wird also ein richtiges Abbild des Objekts erhalten. Dabei werden von dem optischen System, das konventionell benutzt nur die Orts-Frequenzen  $|R| \leq R'$  durchläßt, jetzt die Orts-Frequenzen  $|R - R_M| \leq R'$  übertragen. Wird z. B.  $R_M = R'$  gewählt, werden alle Objekt-Frequenzen  $|R| \leq 2R'$  abgebildet, das Auflösungsvermögen wird also verdoppelt. Eine ausführliche Diskussion des neuen Verfahrens soll an anderer Stelle erfolgen<sup>5</sup>.

Auf Grund der engen Analogie zwischen den Theorien der lichtoptischen und der elektronenoptischen Abbildung müssen sich die obigen Überlegungen zumindest prinzipiell auch auf die elektronenoptische Abbildung anwenden lassen.

<sup>5</sup> W. LUKOSZ, Optica Acta [1963] (im Druck).

## BERICHTIGUNG

Zu H. ÜBERALL, Die Polarisation der quasi-monochromatischen Bremsstrahlung von einem Einkristall, Band 17 a, 332 [1962].

Die Einfallrichtung des Elektronenstrahls sollte nahe einer Richtung  $a$  in der (001)-Ebene des Diamantkristalls gewählt werden, welche *nicht* mit einer Gitterachse zusammenfällt (und nicht, wie in der Arbeit erwähnt, nahe einer dichbesetzten Gitterachse, z. B. der [110]-Achse). Ein Beispiel wäre eine Richtung  $a$ , die mit der [100]-Achse einen Winkel von 0.05 Radian einschließt. Mit einer solchen Wahl von  $a$  sind unsere Figuren 1 und 2 gültig, welche den Beitrag von nur einem einzigen reziproken Gitterpunkt,  $b_1$ , berücksichtigen.

Auf S. 333, rechte Spalte, Zeile 8, lies: „mit einer geeignet gewählten Bezugsrichtung“ an Stelle von „mit einer Gitterachse“.

Unsere allgemeinen Formeln (6) und (14) sind natürlich von diesen Bemerkungen nicht betroffen.

Vgl. auch H. ÜBERALL, Proc. Conf. on Photon Interactions in the Bev-Energy Range, 26. – 29. Januar 1963, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass.